

per pensar d'un minut a una hora

Jordi Deulofeu

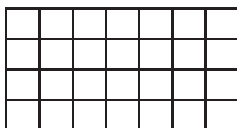
Departament de Didàctica de la Matemàtica
i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
jordi.deulofeu@uab.cat



Les vacances d'estiu són un bon moment per dedicar estones a resoldre problemes, especialment per a aquells que busquem llocs tranquils, ja sigui al mar o a la muntanya, per passar uns quants dies sense res especial per fer, més enllà de llegir, passejar o trobar-se amb els amics en un àpat estiuenc. Els problemes que constitueixen la meua col·laboració d'avui tenen aquest aire i per això són de camps i nivells força diferents, però tenen en comú la idea de repte, a vegades d'endevinalla, pròpia de les situacions lúdiques i plaents. Així, trobareu un problema de demostració sobre una curiosa successió numèrica, el càlcul de l'àrea d'un quadrilàter especial, la determinació d'un raonament lògic en un problema de barrets, la deducció d'una fórmula que relaciona la quantitat d'elements d'una xarxa, i encara, al final, un problema de moviment que es pot resoldre raonant matemàticament i sense fer cap mena de càlcul.

D'acord amb la introducció anterior, vull començar l'article celebrant la iniciativa de la Societat Catalana de Matemàtiques, per segon any consecutiu si no m'equivoco, d'incloure cada dia del mes d'agost un problema o repte elemental, extret de la col·lecció de problemes del Cangur, en la secció que porta per títol «El cervell matemàtic» del diari *La Vanguardia*.

Vaig trobar interessant el repte del dia 21 d'agost, per cert una data capicua (21-8-12), que em permet proposar el primer problema d'avui. El problema publicat a *La Vanguardia* comença explicant què s'entén per una xarxa, una figura rectangular formada per quadrats —que ens pot remetre, entre altres coses, a un tauler—, i quins són els seus elements (vegeu el dibuix): malles (regions —o quadrats— de la xarxa), nusos (vèrtexs interiors) i boles (vèrtexs de la frontera). Concretament, el problema demana que es determini quantes malles conté una xarxa que té exactament 32 nusos i 28 boles. Encara que el repte és força tancat (de solució única) i prou senzill, la situació permet generar altres problemes interessants, a través de l'estudi de la relació entre el nombre de malles, de nusos i de boles.



Dibuix 1. Xarxa amb 28 malles (regions), 18 nusos (vèrtexs interiors)
i 22 boles (vèrtexs exteriors)

Problema 1. Més que un problema concret us proposo que prengueu la situació anterior i tracteu de trobar relacions numèriques entre el nombre d'elements. Considereu primer el nombre de vèrtexs, regions i costats: es tracta de la coneguda fórmula d'Euler però en el pla, senzilla de conjecturar però una mica més difícil de demostrar. Després, deixeu de banda els costats i centreu-vos en regions i vèrtexs, bo i distingint-hi nusos i boles. Donat el nombre de nusos (o el de boles), quantes xarxes diferents es poden formar? Si coneixem la quantitat de dos dels tres elements (malles, nusos i boles), la xarxa queda determinada? En general, quina forma tindrà l'expressió que permet relacionar les quantitats d'aquests elements en una xarxa?

Si heu arribat fins aquí, ben segur que vosaltres mateixos us podreu plantejar, si no ho heu fet ja, altres preguntes interessants al voltant d'aquesta situació.

També les trobades estiuenques són propícies per proposar endevinalles, entreteniments o jocs lògics al voltant d'una taula. A finals d'agost d'aquest any, en un sopar familiar a Begur, la meua neboda Caro, estudiant de sociologia i aficionada a les recreacions matemàtiques, em va proposar un problema que jo no coneixia i que pertany al grup de problemes recreatius que podríem titular: *endevina el color del barret que portes*. L'enunciat és el següent.

Problema 2. Un grup de 30 presoners han de passar una prova: endevinar el color del barret (blanc o negre) que porten posat i que no poden veure. Si l'endevinen seran alliberats; si no, seran executats. Abans de dir el color del barret, es posaran tots en fila i cadascú veurà els barrets de tots els que té al davant a la fila, però no el seu ni els de darrere. Començarà a dir el nom del color del seu barret el que ocupa el darrer lloc a la fila, després el 29è i així successivament fins al primer. Els barrets, blancs o negres, es posaran a l'atzar i durant la prova cap presoner no podrà dir res més que el nom del color del barret (nom que podran sentir tots els altres), quan sigui el seu torn.

La nit abans de la prova, quan tots els presoners en coneixen les condicions, es reuneix tot el grup per intentar cercar una estratègia que els permeti minimitzar el nombre d'execucions; després de pensar-hi una estona, en troben una que els permetrà salvar-se tots menys un, que tindrà una probabilitat del 50% de salvar-se.

Sabríeu trobar aquesta estratègia? Si varia el nombre de presoners es pot aplicar igualment, o cal fer alguna modificació?

El següent problema és una bonica situació geomètrica que em va proposar la Laura Morera, companya del departament, i que us proposo perquè vaig gaudir resolent-lo. Com sempre en aquests tipus de problemes, es tracta de trobar una solució a partir de mètodes geomètrics elementals. Un cop l'hagueu resolt, no us costarà gaire fer-ne una generalització interessant.

Problema 3. Considerem un quadrant de circumferència, o si ho preferiu un sector circular d'amplitud 90° , format per dos radis i l'arc de circumferència corresponent. Prenem un punt P sobre l'arc de circumferència i tracem els dos segments que uneixen P amb els punts on els dos radis intersecten la circumferència. Si la mesura d'aquests dos segments és 2 i 3 cm respectivament, quina és l'àrea del quadrilàter format pels dos radis i aquests dos segments?

Si amb un dibuix (cosa imprescindible per abordar el problema) no en teniu prou, preneu el Geogebra i ben aviat començareu a fer conjectures interessants sobre les relacions entre els elements d'aquest curiós quadrilàter. Potser fins i tot observareu que, en una de les possibles maneres de resoldre el problema, s'hi amaga un conegut teorema relacionat amb el teorema de Pitàgores.

Acabaré l'article amb un parell de problemes sorgits de la relectura, que també he fet aquest estiu, del llibre *One Hundred Problems in Elementary Mathematics* (Steinhaus, 1979), un interessant i variat recull de problemes de diferents temes, que Hugo Dynoizy Steinhaus (1887-1972) va publicar inicialment el 1964, i sobre els quals Martin Gardner destaca la seva originalitat. L'autor d'origen jueu és un reputat matemàtic polonès format a la Universitat de Göttingen, on va llegir la tesi doctoral (1911) sobre el principi de Dirichlet sota la direcció de David Hilbert; acabada la Segona Guerra Mundial, des de la Universitat de Wroclaw, va ser un dels principals artífexs del renaixement de la matemàtica polonesa, de la qual en van sorgir matemàtics com Banach, que va ser estudiant de Steinhaus i amb qui va col·laborar. A més d'un molt bon matemàtic que va fer contribucions rellevants en camps molt diversos, es va preocupar per temes relacionats amb el seu ensenyament, a través de llibres de problemes de caràcter divulgatiu i recreatiu.

En la introducció de la primera edició del llibre esmentat, diu: «Amb aquesta col·lecció de problemes vull apel·lar a allò que hi ha d'infant en un científic i a allò que hi ha de científic en un infant, encara que potser només he reeixit en passar-m'ho bé jo mateix».

Problema 4. Construïm una successió d'enters d'una sola xifra de la següent manera: comencem amb els nombres 2 i 3. Els multipliquem i tenim 6 (3r terme). Multipliquem 3 per 6 i obtenim 18. El 4t terme serà 1 i el 5è serà 8. La successió és fins aquí: 2, 3, 6, 1, 8, i els últims dígitos que hem multiplicat són el 3 i el 6. Per tant, ara hem de multiplicar $6 \cdot 1 = 6$ (6è terme); seguim: $1 \cdot 8 = 8$ (7è terme), i així successivament. Seguint la successió tindrem:

2, 3, 6, 1, 8, 6, 8, 4, 8, 4, 8, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 2, ...

Per no equivocar-se el millor és anar construint la successió i assenyalant els darrers nombres que hem multiplicat, tenint en compte que cadascun d'ells, llevat del 1r, forma part de dues multiplicacions consecutives.

Podeu observar que en els vint primers termes ja han aparegut els nombres 1, 2, 3, 4, 6 i 8. La conjectura sembla clara: els altres nombres d'una xifra no apareixeran en la successió, però també pot haver-hi altres conjectures interessants. Sabríeu demostrar que no pot haver-hi dos nombres senars consecutius? Proveu també que els dígitos que falten (5, 7 i 9, i si voleu també el 0) no apareixeran mai en aquesta successió.

El problema, prou senzill després de pensar-hi una estona, porta a una interessant reflexió sobre els resultats que s'obtenen en les taules de multiplicar, en particular sobre les xifres que formen els nombres resultants.

Acabaré amb un altre problema de l'esmentat llibre de Steinhaus que apareix en el darrer capítol i que correspon a una sèrie de problemes de l'anomenat Dr. Abracadabrus.

Problema 5. Imagineu un àbac format per deu varetes paral·leles d'igual longitud, que suposarem situades horitzontalment, i a cada vareta hi ha una bola. La posició inicial de les boles és desconeguda i les boles es mouen amb una velocitat constant i igual per a totes. Suposem un eix de simetria, perpendicular a les varetes, que divideix l'àbac en dues parts, que anomenarem dreta i esquerra. Suposem que el moviment es produeix de tal manera que a la banda dreta de l'àbac no hi ha mai més de set boles. En aquestes condicions, el Dr. Abracadabrus assegura que a la banda dreta de l'àbac tampoc no hi haurà mai menys de tres boles. És certa aquesta afirmació? Sabríeu demostrar-la?

Això és tot per aquesta vegada. Només desitjo, seguint Steinhaus, l'autor rememorat avui, que us ho passeu tan bé resolent aquests problemes com m'ho he passat jo preparant-los.

Bibliografia

Steinhaus, H. (1979). *One Hundred Problems in Elementary Mathematics*. Nova York: Dover.

.....